Técnicas de Conteo

El Principio Básico de Conteo

Vamos a una cafetería que vende hamburguesas. Un anuncio nos dice que con los ingredientes lechuga, tomate, salsa de tomate y cebolla, podemos preparar una hamburguesa en una de 16 formas posibles. ¿Está el anuncio en lo correcto? Para corroborar la información del anuncio enumeramos todas estas posibles formas:

	Lechuga	Tomate	Salsa	Cebolla
1	Si	Si	Si	Si
2	Si	Si	Si	No
3	Si	Si	No	Si
4	Si	Si	No	No
5	Si	No	Si	Si
6	Si	No	Si	No
7	Si	No	No	Si
8	Si	No	No	No
9	No	Si	Si	Si
10	No	Si	Si	No
11	No	Si	No	Si
12	No	Si	No	No
13	No	No	Si	Si
14	No	No	Si	No
15	No	No	No	Si
16	No	No	No	No

Pregunta
¿Notas algún patrón al construir esta tabla? ¿Puedes expresar esta tabla como un árbol binario?

Vemos que el anuncio está en lo correcto, pues con esos 4 ingredientes hay 16 formas distintas en que la hamburguesa puede prepararse.

Pregunta
¿Qué pasaría si tuviéramos más ingredientes disponibles, por ejemplo 10? ¿Habría necesariamente que enumerarlas todas para saber de cuántas formas puede prepararse una hamburguesa?

Esta sería una labor muy tediosa, pues como veremos más adelante, hay 1,024 formas de preparar una hamburguesa usando 10 ingredientes.

Pregunta
¿Qué tal si nos interesara saber cuántas tablillas distintas pueden fabricarse si cada una tiene asignado un número de 6 dígitos?

Es claro que no deseamos enumerar todas las posibilidades una por una y que necesitamos algún método que nos facilite la tarea de saber ese total.

Uno de los propósitos de estudiar los métodos de conteo es aprender a contar casos o sucesos sin tener la necesidad de enumerarlos uno por uno. El Principio Básico de Conteo nos provee esta herramienta para contar sin enumerar:

Principio Básico de Conteo (Regla de multiplicación)

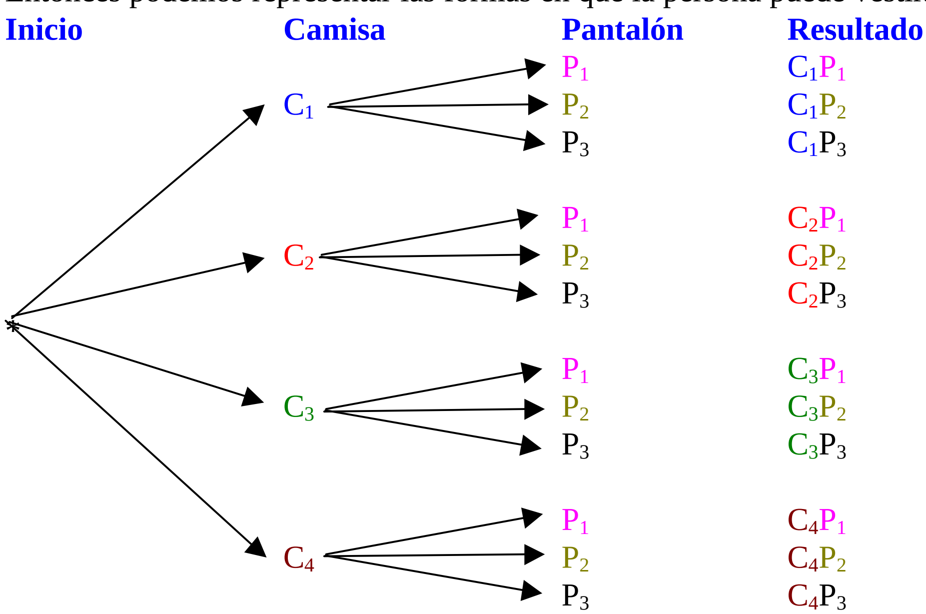
Supongamos que vamos a efectuar una actividad que se compone de dos partes. La primera parte puede resultar en uno de **m** resultados posibles. Para cada uno de los posibles resultados de la primera parte, la segunda parte puede tener uno de **n** resultados posibles. Entonces la actividad va tener un total de **mn** resultados posibles.

Ejemplo

Una persona tiene disponible 4 camisas y 3 pantalones. Al levantarse en la mañana esta selecciona una camisa y un pantalón cualquiera para vestirse. ¿De cuántas formas puede resultar vestida la persona?

Aquí la actividad que se efectúa es que la persona se viste. Esta actividad consiste de dos partes, la primera en seleccionar el pantalón y la segunda en seleccionar la camisa. Como puede seleccionar el pantalón en una de n=3 formas y por cada pantalón seleccionado puede escoger una de m=4 camisas este puede resultar vestido en una de nm = 4(3) = 12 formas diferentes.

El resultado en este ejemplo se puede describir de otra forma que en realidad equivale a la enumeración. Escribamos el conjunto de camisas como $C = \{ C_1, C_2, C_3, C_4\}$ y el de pantalones como $P =\{ P_1, P_2, P_3\}$. Entonces podemos representar las formas en que la persona puede vestirse por medio del siguiente árbol:



Si recorremos el árbol por cualquiera de sus ramas podemos encontrar las formas diferentes en que la persona puede resultar vestida. Vemos que hay 12 puntos finales (llamados hojas) en este árbol. Este es el mismo número que habíamos encontrado anteriormente.

Estos árboles corresponden a una enumeración completa de todas las posibilidades y crecen muy rápidamente, por lo cual no es práctico construir uno para todas las situaciones. Si la actividad se compone de más de dos partes podemos aplicar el Principio Básico de Conteo repetidamente para obtener una generalización.

Ejemplo

El número de hamburguesas diferentes que pueden prepararse con 4 ingredientes puede estudiarse ahora. La actividad corresponde a preparar una hamburguesa y cada parte de la actividad corresponde a usar o no un ingrediente determinado.

Para cada ingrediente solo tenemos una de dos posibles decisiones que tomar : usarlo o no usarlo. Así que el número de posibles hamburguesas diferentes es $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$. Razonando de la misma manera vemos que el número de hamburguesas diferentes que se pueden preparar con 10 ingredientes es $2^{10} = 1{,}024$.

Principio Básico de Conteo Generalizado :

Supongamos que vamos a efectuar una actividad que se compone de **k** partes. La primera parte puede resultar en uno de $\mathbf{n_1}$ resultados posibles. Para cada uno de los posibles resultados de la primera parte, la segunda parte puede resultar en uno de $\mathbf{n_2}$ resultados posibles. En general, para cada una de los posibles resultados de las partes anteriores, la i-ésima parte puede resultar en uno de $\mathbf{n_i}$ resultados distintos. Entonces el total de resultados de la actividad es $\mathbf{n_1 n_2 n_3 \ldots n_k}$.

Pregunta

¿Cuántos subconjuntos distintos tiene un conjunto de n elementos?

Esta situación puede relacionarse con la de hamburguesas al pensar en cada elemento del conjunto como si fuera un ingrediente para una hamburguesa. Entonces cada subconjunto corresponde a cómo resulta cada hamburguesa distinta. Ahora sólo tenemos que contar el número de hamburguesas distintas que podemos preparar con esos n elementos.

Seleccionemos un subconjunto. Para hacerlo examinamos cada elemento de A uno por uno y tomamos la decisión de seleccionarlo o no para nuestro subconjunto. Así para cada elemento de A tenemos que tomar una de dos posibles decisiones: incluirlo o no. Por lo tanto el número de subconjuntos que pueden seleccionarse de A es $2 \times 2 \times \ldots \times 2$ (n veces) o 2^n.

Permutaciones

Considera tablillas para automóviles tal como eran antes, con números de seis dígitos.
Los dígitos son seleccionados del conjunto {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Para cada uno de los seis dígitos que componen el número de la tablilla, tenemos diez posibilidades distintas. Así el número de tablillas distintas que pueden preparse es $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^6$.

Pregunta

Se nombra a una persona supersticiosa a dirigir el Departamento de Obras Públicas. Por considerarlo mala suerte, la persona establece que los dígitos en las tablillas no pueden repetirse. ¿Cuántas tablillas distintas pueden preparse ahora?

Podemos usar el principio básico de conteo generalizado para resolver esta situación. Para el primer dígito podemos seleccionar uno de los diez que están disponibles. Una vez seleccionado el primer dígito seleccionamos el segundo de entre los 9 dígitos que quedan. El tercer dígito tendrá que seleccionarse de entre los 8 que están ahora disponibles y así sucesivamente. El número total de tablillas que se pueden fabricar es: 10 x 9 x 8 x 7 x 6 x 5 = 151,200. Esta cantidad es apreciablemente menor que antes. ¡Se quedarían muchos automóviles sin tablilla!

Podemos visualizar este problema pensando en que tenemos seis posiciones que deben ser llenadas con una de los dígitos del conjunto : {0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,}.

Posición	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Dígitos disponibles	10	9	8	7	6	5

Nota
Este proceso corresponde a tomar una muestra sin reemplazo de tamaño 6 del conjunto {0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,}.
Un arreglo ordenado como los números de las tablillas se conoce como una **permutación**. En el ejemplo anterior, seleccionamos seis dígitos (sin reemplazo) de un total de 10 disponibles, denotamos por ${}_{10}P_6$ el número de permutaciones obtenidas.

En general, si tenemos n objetos distintos y los seleccionamos uno a uno sin reemplazarlos, obtendríamos un total de ${}_nP_n$ = n(n-1)(n-2)...2x1 = n! resultados distintos. El símbolo n! se conoce como **n factorial**. Este valor corresponde al producto de todos los enteros desde n hasta el 1. Por conveniencia definimos 0!=1.

Nota
Además de representar una muestra sin reemplazo que es posible obtener, una permutación representa un orden de los objetos seleccionados.

Regresando al ejemplo de las tablillas, tenemos, que al seleccionar dígitos sin reemplazo, tenemos ${}_{10}P_6$ permutaciones (números resultantes en la tablillas) distintas.

Vemos que
${}_{10}P_6$ = 10 x 9 x 8 x 7 x 6 x 5 = (10 - 0) x (10 -1) x (10 -2) x (10 - 3) x (10 - 4) x (10 - 5)
= (10 - 0) x (10 -1) x (10 -2) x (10 - 3) x (10 - 4) x (10 - 6 + 1)
= 10 x (10 -1) x ... x (10 - 6 + 1).

El hacer esta última observación nos permite escribir una fórmula para cuando tenemos n objetos en nuestro conjunto inicial y seleccionamos k de ellos sin reemplazo. Así ${}_nP_k$ = n x (n -1) x ...x (n - k +1) es el **número de permutaciones de n objetos tomados k** a la vez.

Podemos escribir ese número de la siguiente forma usando la notación factorial:

$$
\begin{aligned}
{}_nP_k &= n(n-1)(n-2)...(n-k+1) \\
&= n(n-1)(n-2)...(n-k+1)\frac{(n-k)(n-k-1)...(2)1}{(n-k)(n-k-1)...(2)1} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)(n-k)(n-k-1)...(2)1}{(n-k)(n-k-1)...(2)1} = \frac{n!}{k!}
\end{aligned}
$$

Pregunta

Imaginemos que no nos importara el orden en que seleccionamos los dígitos cuando fabricamos tablillas. ¿Cuántas podriamos fabricar?

Combinaciones

El orden en que seleccionamos lo objetos era importante para calcular el númeroo de permutaciones. Sin embargo, ahora queremos saber el número de arreglos posibles de n objetos tomados k a la vez sin importarnos el orden de los objetos seleccionados. Estos arreglos donde no nos interesa el orden se conocen como **combinaciones**.

Ejemplo

Tenemos un conjunto de 4 letras {a, b, c, d} . ¿De cuántas maneras podemos seleccionar tres de ellas si nos interesa el orden? De acuerdo a los resultados que obtuvimos antes, tendremos un total de 4 x 3 x 2 = 24 permutaciones distintas. Estas son:

abc	acb	bac	bca	cab	cba
acd	adc	cad	cda	dac	dca
abd	adb	bad	bda	dab	dba
bcd	bdc	cbd	cdb	dbc	dcb

Pregunta

¿Hay algún patrón en esta tabla? ¿Cómo se construyó?

Si miramos cada fila podemos observar que los arreglos obtenidos en cada una de ellas corresponde a un rearreglo de las letras del primer miembro en la fila. Si no nos interesara el orden, todos los arreglos en la primera fila representan el mismo resultado: el conjunto {a, b, c}. De seis arreglos (en orden)que teníamos originalmente llegamos a uno sólo. Lo mismo ocurre en cada una de las otras filas de la tabla.

Siguiendo ese mismo razonamiento, sólo tenemos cuatro arreglos distintos de cuatro letras tomadas tres a la vez si no nos interesa el orden de las mismas.

Para obtener formalmente el número de combinaciones de cuatro objetos tomados tres a la vez hacemos dos pasos. Primero encontramos el número de permutaciones obtenidas cuando seleccionamos tres letras del total de cuatro disponibles:
4 x 3 x 2 = 24.

Luego examinamos una permutación cualquiera, digamos abc, y vemos que hay 3x2x1 formas de permutar las tres letras entre sí. Como no nos interesa el orden, cada una de estas permutaciones no altera el conjunto de letras {a, b, c} de los arreglos. Así de cada una de estas permutaciones podemos obtener un total de seis permutaciones equivalentes. Por lo cual, el número de arreglos que se pueden obtener de un total de cuatro objetos cuando seleccionamos tres a la vez sin importar el orden es 24/6 = 4.

Examinenos el proceso. El número 24 se obtuvo al considerar las permutaciones de 4 objetos tomados 3 a la vez, es decir, 24 = 4 x 3 x (4 - 3 +1). El número 6 se obtuvo al considerar las permutaciones de tres objetos tomados tres a la vez, 6 = 3 x 2 x 1 = 3! El número deseado es entonces $\frac{4\times3\times2}{3!}=\frac{4\times3\times(4-3+1)}{3!}=\frac{4\times3\times2\times1}{1!3!}=\frac{4!}{1!3!}$.

En general, el número de combinaciones de n objetos tomados k a la vez se obtiene de la siguiente manera ${}_nC_k=\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$. Este coeficiente se conoce como el **coeficiente binomial**.

Ejemplo

1. ¿Cuántas maneras hay de seleccionar un comité de 5 personas cuando tenemos un grupo de 7 mujeres y 5 hombres?
2. ¿De cuántas maneras podemos seleccionar un comité de 5 personas si ese comité debe tener 3 mujeres y 2 hombres.?

3. ¿De cuántas maneras podemos seleccionar un comité de 5 personas si ese comité debe tener 3 mujeres y 2 hombres y hay dos mujeres que no pueden servir juntas?

Hay varias formas de contestar esta última pregunta. Consideraremos el número de comités donde estas dos mujeres están juntas y restaremos este número del número total de comités posibles para obtener la contestación. Seleccionamos el comité en dos pasos. La selección de los dos hombres no cambia, estos pueden ser seleccionados de 10 formas diferentes.

Ahora consideramos los subcomités de mujeres donde estas dos mujeres están juntas. Nótese que ya hemos seleccionado dos de los miembros de este subcomité y nos queda por seleccionar solo una de las 5 mujeres restantes. Esta selección puede
hacerse en ${}_5C_1$ = 5 formas diferentes.

Entonces el número de comités donde estas dos mujeres están juntas es 10 x 5 = 50. Restamos esto del total de comités posibles para obtener 350 - 50 = 300 comités donde las dos mujeres no están juntas.

Otra forma de contestar esta pregunta es directamente. Para esto tenemos que contar el número de comités donde no esté ninguna de las dos y añadirle el número de comités donde solo esté una de ellas.

El comité donde no está ninguna de ellas puede ser seleccionado de ${}_5C_3$ x ${}_5C_2$ x ${}_2C_0$ = 100 formas diferentes. El número ${}_5C_3$ corresponde al número de subcomités de 3 hombres que podemos tener, el coeficiente ${}_5C_2$ corresponde a seleccionar los miembros del subcomité de mujeres entre las otras cinco mujeres (removiendo las dos que no queremos) y ${}_2C_0$ es el número de formas en que no seleccionamos ninguna de las dos mujeres que no pueden estar juntas.

El comité donde está exactamente una de ellas puede ser seleccionado de
${}_5C_3$ x ${}_5C_2$ x ${}_2C_1$ = 200 formas diferentes. La cantidad ${}_2C_1$ representa el número de formas de seleccionar una de las dos que no pueden estar juntas. En total tenemos 100 + 200 = 300 formas diferentes de seleccionar este comité, al igual que antes.

Pregunta

Tenemos 25 personas en el salón. ¿Cúal es la probabilidad de que ningún par de personas cumpla años en el mismo día?

Para que ningún par de personas cumpla años el mismo día es necesario que todas las personas cumplan años en días diferentes. Si asumimos que todas las fechas del año son equiprobables y no consideramos años bisiestos tenemos que 25 personas pueden cumplir años en una de

$$365 \times 365 \times 365 \times \ldots \times 365 = 365^{25}$$ formas diferentes.

Si queremos que estas personas cumplan años en días diferentes tenemos

$365 \times 364 \times 363 \times \ldots \times 341$ formas diferentes en que estos pueden hacerlo.

Por lo tanto la probabilidad deseada es

$$(365 \times 364 \times 363 \times \ldots \times 341)/365^{25} = .4313$$

Debes notar el hecho interesante de que en un grupo de 25 personas, la probabilidad de que haya al menos un par de personas que cumplan años el mismo día es
1 - .4313 = .5687 . Esto también se puede ver como que en cerca del 57% de los grupos de 25 personas que puedan formarse al azar habrá por lo menos un par de individuos que cumplen años el mismo día.

Pregunta

1. *Considera un conjunto de n elementos. ¿Cuántos subconjuntos de k elementos tiene?*
2. *Usa un argumento combinatorio para demostrar que* $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
3. *Demuestra el Teorema del Binomio con un argumento combinatorio: Si a, b son números*

reales y n es un número entero, entonces $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

4. *Contesta la pregunta 2 usando el Teorema del Binomio.*
5. *Usa un argumento combinatorio para demostrar que* $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.